

Sémantique

... d'un langage impératif jouet

IMP: syntaxe

Commandes

$c ::=$	$x := e$	affectation
	skip	ne rien faire
	$c_1; c_2$	séquence
	if e then c_1 else c_2	conditionnelle
	while e do c	boucle while

Expressions

$e ::=$	x	variables
	n	constante entière ($n \in \mathbb{Z}$)
	$e + e$	addition
	$-e$	opposé

Sémantiques

- Opérationnelles: la sémantique décrit une machine/automate/graphe de configurations C , avec transitions/arêtes $C \rightarrow C'$
- Dénotationnelles: la sémantique décrit directement la valeur $\llbracket e \rrbracket$ des expressions e et $\llbracket c \rrbracket$ des commandes c

Sémantique dénotationnelle des expressions

- Calcul de la valeur $\llbracket e \rrbracket \rho$ dans un environnement $\rho : \text{Var} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$\llbracket x \rrbracket \rho = \rho(x)$$

$$\llbracket \dot{n} \rrbracket \rho = n$$

$$\llbracket e_1 \dot{+} e_2 \rrbracket \rho = \llbracket e_1 \rrbracket \rho + \llbracket e_2 \rrbracket \rho$$

$$\llbracket \dot{-} e \rrbracket \rho = - \llbracket e \rrbracket \rho.$$

Une tentative ratée?

Dénotationnelle

$$\llbracket x := e \rrbracket \rho = \rho[x \mapsto \llbracket e \rrbracket \rho]$$

$$\llbracket \text{skip} \rrbracket \rho = \rho$$

$$\llbracket c_1; c_2 \rrbracket \rho = \llbracket c_2 \rrbracket (\llbracket c_1 \rrbracket \rho)$$

$$\llbracket \text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2 \rrbracket \rho = \begin{cases} \llbracket c_1 \rrbracket \rho & \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho \neq 0 \\ \llbracket c_2 \rrbracket \rho & \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho = 0 \end{cases}$$

$$\llbracket \text{while } e \text{ do } c \rrbracket \rho = \begin{cases} \rho & \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho = 0 \\ \llbracket \text{while } e \text{ do } c \rrbracket (\llbracket c \rrbracket \rho) & \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho \neq 0 \end{cases}$$

Nous résoudrons le problème plus tard, à l'aide de théorèmes de point fixe.

Une autre: satisfaisante?

Opérationnelle
petits pas

$$\begin{array}{c} \frac{}{(x := e, \rho) \rightarrow \rho[x \mapsto \llbracket e \rrbracket \rho]} (\rightarrow :=) \qquad \frac{}{(\text{skip}, \rho) \rightarrow \rho} (\rightarrow \text{skip}) \\[10pt] \frac{(c_1, \rho) \rightarrow \rho'}{(c_1; c_2, \rho) \rightarrow (c_2, \rho')} (\rightarrow Seq_{fin}) \qquad \frac{(c_1, \rho) \rightarrow (c'_1, \rho')}{(c_1; c_2, \rho) \rightarrow (c'_1; c_2, \rho')} (\rightarrow Seq) \\[10pt] \frac{}{(\text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2, \rho) \rightarrow (c_1, \rho)} (\rightarrow \text{if } 1) \qquad \frac{}{(\text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2, \rho) \rightarrow (c_2, \rho)} (\rightarrow \text{if } 2) \\ \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho \neq 0 \qquad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho = 0 \\[10pt] \frac{}{(\text{while } e \text{ do } c, \rho) \rightarrow (c; \text{while } e \text{ do } c, \rho)} (\rightarrow \text{while}) \qquad \frac{}{(\text{while } e \text{ do } c, \rho) \rightarrow \rho} (\rightarrow \text{while}_{fin}) \\ \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho \neq 0 \qquad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho = 0 \end{array}$$

Une autre: satisfaisante?

Opérationnelle
petits pas

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{(x := e, \rho) \rightarrow \rho[x \mapsto \llbracket e \rrbracket \rho]} (\rightarrow :=) \quad \frac{}{(\text{skip}, \rho) \rightarrow \rho} (\rightarrow \text{skip}) \\
 \\
 \frac{(c_1, \rho) \rightarrow \rho'}{(c_1; c_2, \rho) \rightarrow (c_2, \rho')} (\rightarrow Seq_{fin}) \quad \frac{(c_1, \rho) \rightarrow (c'_1, \rho')}{(c_1; c_2, \rho) \rightarrow (c'_1; c_2, \rho')} (\rightarrow Seq) \\
 \\
 \frac{}{(\text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2, \rho) \rightarrow (c_1, \rho)}_{\text{si } \llbracket e \rrbracket \rho \neq 0} (\rightarrow \text{if } 1) \quad \frac{}{(\text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2, \rho) \rightarrow (c_2, \rho)}_{\text{si } \llbracket e \rrbracket \rho = 0} (\rightarrow \text{if } 2) \\
 \\
 \frac{}{(\text{while } e \text{ do } c, \rho) \rightarrow (c; \text{while } e \text{ do } c, \rho)}_{\text{si } \llbracket e \rrbracket \rho \neq 0} (\rightarrow \text{while}) \quad \frac{}{(\text{while } e \text{ do } c, \rho) \rightarrow \rho}_{\text{si } \llbracket e \rrbracket \rho = 0} (\rightarrow \text{while}_{fin})
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{(x := x + 1, \rho) \rightarrow \rho'} (\rightarrow :=) \\
 \frac{}{(x := x + 1; y := x, \rho) \rightarrow (y := x, \rho')} (\rightarrow Seq_{fin}) \\
 \frac{}{((x := x + 1; y := x); x := 3 + (-y), \rho) \rightarrow (y := x; x := 3 + (-y), \rho')} (\rightarrow Seq)
 \end{array}$$

Une sémantique élégante

Opérationnelle
petits pas

$$(x := e \cdot C, \rho) \rightarrow (C, \rho[x \mapsto \llbracket e \rrbracket \rho]) \quad (3)$$

$$(\text{skip} \cdot C, \rho) \rightarrow (C, \rho) \quad (4)$$

$$(c_1; c_2 \cdot C, \rho) \rightarrow (c_1 \cdot c_2 \cdot C, \rho) \quad (5)$$

$$(\text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2 \cdot C, \rho) \rightarrow (c_1 \cdot C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho \neq 0 \quad (6)$$

$$(\text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2 \cdot C, \rho) \rightarrow (c_2 \cdot C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho = 0 \quad (7)$$

$$(\text{while } e \text{ do } c \cdot C, \rho) \rightarrow (c \cdot \text{while } e \text{ do } c \cdot C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho \neq 0 \quad (8)$$

$$(\text{while } e \text{ do } c \cdot C, \rho) \rightarrow (C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho = 0 \quad (9)$$

Une sémantique élégante

Opérationnelle
petits pas

Example:

$$\begin{array}{c}
 x := 3; y := 1; \text{while } x \text{ do } \underbrace{(y := y + x; x := x + (-1))}_{c_3} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{c_2} \\
 \underbrace{\hspace{15em}}_{c_1} \\
 \underbrace{\hspace{20em}}_{c_0}
 \end{array}$$

$$(x := e \cdot C, \rho) \rightarrow (C, \rho[x \mapsto \llbracket e \rrbracket \rho]) \quad (3)$$

$$(\text{skip} \cdot C, \rho) \rightarrow (C, \rho) \quad (4)$$

$$(c_1; c_2 \cdot C, \rho) \rightarrow (c_1 \cdot c_2 \cdot C, \rho) \quad (5)$$

$$(\text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2 \cdot C, \rho) \rightarrow (c_1 \cdot C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho \neq 0 \quad (6)$$

$$(\text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2 \cdot C, \rho) \rightarrow (c_2 \cdot C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho = 0 \quad (7)$$

$$(\text{while } e \text{ do } c \cdot C, \rho) \rightarrow (c \cdot \text{while } e \text{ do } c \cdot C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho \neq 0 \quad (8)$$

$$(\text{while } e \text{ do } c \cdot C, \rho) \rightarrow (C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho = 0 \quad (9)$$

Une sémantique élégante

Opérationnelle
petits pas

$$(x := e \cdot C, \rho) \rightarrow (C, \rho[x \mapsto \llbracket e \rrbracket \rho]) \quad (3)$$

$$(\text{skip} \cdot C, \rho) \rightarrow (C, \rho) \quad (4)$$

$$(c_1; c_2 \cdot C, \rho) \rightarrow (c_1 \cdot c_2 \cdot C, \rho) \quad (5)$$

$$(\text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2 \cdot C, \rho) \rightarrow (c_1 \cdot C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho \neq 0 \quad (6)$$

$$(\text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2 \cdot C, \rho) \rightarrow (c_2 \cdot C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho = 0 \quad (7)$$

$$(\text{while } e \text{ do } c \cdot C, \rho) \rightarrow (c \cdot \text{while } e \text{ do } c \cdot C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho \neq 0 \quad (8)$$

$$(\text{while } e \text{ do } c \cdot C, \rho) \rightarrow (C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho = 0 \quad (9)$$

Example:

$x := 3; y := 1; \text{while } x \text{ do } (y := y + x; x := x + (-1))$

$$\begin{aligned} (c_0 \cdot \epsilon, \rho_0) &\rightarrow (x := 3 \cdot c_1 \cdot \epsilon, \rho_0) \\ &\rightarrow (c_1 \cdot \epsilon, \rho_0[x \mapsto 3]) \\ &\rightarrow (y := 1 \cdot c_2 \cdot \epsilon, \rho_0[x \mapsto 3]) \\ &\rightarrow (c_2 \cdot \epsilon, \rho_0[x \mapsto 3, y \mapsto 1]) \\ &\rightarrow (c_3 \cdot c_2 \cdot \epsilon, \rho_0[x \mapsto 3, y \mapsto 1]) \\ &\rightarrow (y := y + x \cdot x := x + (-1) \cdot c_2 \cdot \epsilon, \rho_0[x \mapsto 3, y \mapsto 1]) \\ &\rightarrow (x := x + (-1) \cdot c_2 \cdot \epsilon, \rho_0[x \mapsto 3, y \mapsto 4]) \\ &\rightarrow (c_2 \cdot \epsilon, \rho_0[x \mapsto 2, y \mapsto 4]) \\ &\rightarrow (c_3 \cdot c_2 \cdot \epsilon, \rho_0[x \mapsto 2, y \mapsto 4]) \\ &\rightarrow (y := y + x \cdot x := x + (-1) \cdot c_2 \cdot \epsilon, \rho_0[x \mapsto 2, y \mapsto 4]) \\ &\rightarrow (x := x + (-1) \cdot c_2 \cdot \epsilon, \rho_0[x \mapsto 2, y \mapsto 6]) \\ &\rightarrow (c_2 \cdot \epsilon, \rho_0[x \mapsto 1, y \mapsto 6]) \\ &\rightarrow (c_3 \cdot c_2 \cdot \epsilon, \rho_0[x \mapsto 1, y \mapsto 6]) \\ &\rightarrow (y := y + x \cdot x := x + (-1) \cdot c_2 \cdot \epsilon, \rho_0[x \mapsto 1, y \mapsto 6]) \\ &\rightarrow (x := x + (-1) \cdot c_2 \cdot \epsilon, \rho_0[x \mapsto 1, y \mapsto 7]) \\ &\rightarrow (c_2 \cdot \epsilon, \rho_0[x \mapsto 0, y \mapsto 7]) \\ &\rightarrow (\epsilon, \rho_0[x \mapsto 0, y \mapsto 7]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{par (5)} \\ &\text{par (3)} \\ &\text{par (5)} \\ &\text{par (3)} \\ &\text{par (8)} \\ &\text{par (5)} \\ &\text{par (3)} \\ &\text{par (3)} \\ &\text{par (8)} \\ &\text{par (5)} \\ &\text{par (3)} \\ &\text{par (3)} \\ &\text{par (8)} \\ &\text{par (5)} \\ &\text{par (3)} \\ &\text{par (3)} \\ &\text{par (9)} \end{aligned}$$

Théorème I : progrès

$$(x := e \cdot C, \rho) \rightarrow (C, \rho[x \mapsto \llbracket e \rrbracket \rho]) \quad (3)$$

$$(\text{skip} \cdot C, \rho) \rightarrow (C, \rho) \quad (4)$$

$$(c_1; c_2 \cdot C, \rho) \rightarrow (c_1 \cdot c_2 \cdot C, \rho) \quad (5)$$

$$(\text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2 \cdot C, \rho) \rightarrow (c_1 \cdot C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho \neq 0 \quad (6)$$

$$(\text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2 \cdot C, \rho) \rightarrow (c_2 \cdot C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho = 0 \quad (7)$$

$$(\text{while } e \text{ do } c \cdot C, \rho) \rightarrow (c \cdot \text{while } e \text{ do } c \cdot C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho \neq 0 \quad (8)$$

$$(\text{while } e \text{ do } c \cdot C, \rho) \rightarrow (C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho = 0 \quad (9)$$

- « La machine ne s'arrête pas tant qu'il reste quelque chose à faire »
- **Thm**: les seules configurations sans successeur sont de la forme (ε, ρ) .

Théorème 2: déterminisme

$$(x := e \cdot C, \rho) \rightarrow (C, \rho[x \mapsto \llbracket e \rrbracket \rho]) \quad (3)$$

$$(\text{skip} \cdot C, \rho) \rightarrow (C, \rho) \quad (4)$$

$$(c_1; c_2 \cdot C, \rho) \rightarrow (c_1 \cdot c_2 \cdot C, \rho) \quad (5)$$

$$(\text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2 \cdot C, \rho) \rightarrow (c_1 \cdot C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho \neq 0 \quad (6)$$

$$(\text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2 \cdot C, \rho) \rightarrow (c_2 \cdot C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho = 0 \quad (7)$$

$$(\text{while } e \text{ do } c \cdot C, \rho) \rightarrow (c \cdot \text{while } e \text{ do } c \cdot C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho \neq 0 \quad (8)$$

$$(\text{while } e \text{ do } c \cdot C, \rho) \rightarrow (C, \rho) \quad \text{si } \llbracket e \rrbracket \rho = 0 \quad (9)$$

- **Thm:** toute configuration (C, ρ) a au plus un successeur.
- Preuve: analyse de cas.
- Est le cas pour IMP, mais ne sera pas vrai pour d'autres langages (ex: C).

Sémantique opérationnelle à grands pas

- On décrit une relation entre un programme et sa valeur finale.
- Jugements $\rho \vdash c \Rightarrow \rho'$
- « *Partant de l'environnement ρ , la commande c termine sur l'environnement ρ' .* »

Sémantique opérationnelle à grands pas

$$\frac{}{\rho \vdash x := e \Rightarrow \rho[x \mapsto \llbracket e \rrbracket \rho]} (:=) \qquad \frac{}{\rho \vdash \text{skip} \Rightarrow \rho} (\text{skip})$$

$$\frac{\rho \vdash c_1 \Rightarrow \rho' \quad \rho' \vdash c_2 \Rightarrow \rho''}{\rho \vdash c_1; c_2 \Rightarrow \rho''} (Seq)$$

$$\frac{\rho \vdash c_1 \Rightarrow \rho'}{\rho \vdash \text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2 \Rightarrow \rho' \text{ si } \llbracket e \rrbracket \rho \neq 0} (\text{if}_1)$$

$$\frac{\rho \vdash c_2 \Rightarrow \rho'}{\rho \vdash \text{if } e \text{ then } c_1 \text{ else } c_2 \Rightarrow \rho' \text{ si } \llbracket e \rrbracket \rho = 0} (\text{if}_2)$$

$$\frac{\rho \vdash c \Rightarrow \rho' \quad \rho' \vdash \text{while } e \text{ do } c \Rightarrow \rho''}{\rho \vdash \text{while } e \text{ do } c \Rightarrow \rho'' \text{ si } \llbracket e \rrbracket \rho \neq 0} (\text{while})$$

$$\frac{}{\rho \vdash \text{while } e \text{ do } c \Rightarrow \rho \text{ si } \llbracket e \rrbracket \rho = 0} (\text{while}_{fin})$$

Liens entre sémantiques

- Nos deux dernières sémantiques calculent visiblement la même chose.
- Comment formaliser cela?

Correction

- **Thm:** si $(C, \rho) \rightarrow^* (\varepsilon, \rho_\infty)$ [petits pas] alors $\rho \vdash C \Rightarrow \rho_\infty$ est dérivable [grand pas].
- Preuve: par récurrence sur le nombre d'étapes $\rightarrow \dots$

Correction

- **Thm:** si $(C, \rho) \rightarrow^* (\varepsilon, \rho_\infty)$ [petits pas] alors $\rho \vdash C \Rightarrow \rho_\infty$ est dérivable [grand pas].
- Preuve: par récurrence sur le nombre d'étapes $\rightarrow$, en démontrant d'abord:
- **Prop:** si $(C_1, \rho_1) \rightarrow (C_2, \rho_2)$ [petits pas] et $\rho_2 \vdash C_2 \Rightarrow \rho_\infty$ est dérivable [grand pas] alors $\rho_1 \vdash C_1 \Rightarrow \rho_\infty$ est dérivable.

Adéquation

- Dans l'autre sens:
- **Thm:** si $\rho \vdash c \Rightarrow \rho_\infty$ est dérivable [grand pas] alors $(c . \varepsilon, \rho) \rightarrow^* (\varepsilon, \rho_\infty)$ [petits pas].
- Preuve: problème avec les commandes de la forme $c_1; c_2 \dots$

Adéquation

- Dans l'autre sens:
- **Thm:** si $\rho \vdash c \Rightarrow \rho_\infty$ est dérivable [grand pas] alors $(c . \varepsilon, \rho) \rightarrow^* (\varepsilon, \rho_\infty)$ [petits pas].
- Preuve: on doit montrer quelque chose de plus général, à savoir:
... alors *pour tout* C , $(c . C, \rho) \rightarrow^* (C, \rho_\infty)$.

Correction+adéquation

- **Thm:** Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:
 - $\rho \vdash c \Rightarrow \rho_\infty$ est dérivable [grand pas]
 - $(c . \varepsilon, \rho) \rightarrow^* (\varepsilon, \rho_\infty)$ [petits pas].

Exercises:

- Que se passe-t-il pour les calculs qui ne terminent pas? [et qu'est-ce que ça veut dire, dans chaque sémantique?]
- Montrer l'équivalence des deux sémantiques à petits pas (exercice 7 du poly).